

# Signale und Systeme in Zeit- und Frequenzbereich

Thomas Görne, HAW Hamburg

30. Dezember 2009

## Herleitung der Fourier-Transformation linearer zeitinvarianter Systeme

Zur Herleitung der Fourier-Transformation betrachtet man das Verhalten von LTI-Systemen bei der Übertragung harmonischer Schwingungen.

Aus den Grundlagen zu LTI-Systemen ist bekannt, dass die Systemantwort als Faltung des Eingangssignals mit der Impulsantwort des Systems beschrieben werden kann:

$$g(t) = s(t) * h(t).$$

Die harmonischen Schwingungen, in komplexer Schreibweise  $s_E(t) = e^{j\omega t}$ , sind die *Eigenfunktionen* der LTI-Systeme – es ist ja gerade das Kennzeichen des linearen Systems, dass es eine harmonische Schwingung abgesehen von einer Amplituden- und / oder Phasenänderung (dargestellt als komplexer Faktor  $H$ ) unverändert passieren lässt:

$$e^{j\omega t} * h(t) = H e^{j\omega t}.$$

Diese Beziehung zwischen LTI-System und Eigenfunktion kann für eine Schwingung der Kreisfrequenz  $\omega_0 = 2\pi f_0$  dargestellt werden als

$$e^{j\omega_0 t} * h(t) = h(t) * e^{j\omega_0 t} = H e^{j\omega_0 t}.$$

Möchte man berechnen, wie ein LTI-System eine harmonische Schwingung überträgt, dann kann man statt der Impulsantwort auch einfach den komplexen Skalierungsfaktor  $H$  benutzen. Zur Bestimmung von  $H$  wird das Faltungsintegral ausgeschrieben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_0(t-\tau)} d\tau = H e^{j\omega_0 t}.$$

Die Schwingung  $e^{j\omega_0(t-\tau)}$  lässt sich zerlegen in einen bezüglich der Integrationsvariablen  $\tau$  konstanten und einen variablen Teil  $e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega_0 \tau}$ , so dass sich

$$e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau = H e^{j\omega_0 t}$$

ergibt. Vergleich der beiden Seiten und Ersetzung der Integrationsvariablen  $\tau$  durch  $t$  ergibt

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega_0 t} dt.$$

Da diese Beziehung für Eigenfunktionen jeder beliebigen Frequenz gelten muss, kann man sie auch als Funktion der Frequenz schreiben:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

Dies nennt man die Fourier-Transformation  $\mathcal{F}\{h(t)\}$ . Durch die Transformation wird aus der Impulsantwort  $h(t)$  die Übertragungsfunktion  $H(f)$ . Bei realen Systemen wie Filtern, Lautsprechern oder Verstärkern nennt man  $H(f)$  den *Frequenzgang*.

Die Kurzschreibweise für den Übergang zwischen Zeit- und Frequenzbereich ist

$$h(t) \circ \bullet H(f)$$

bzw.

$$H(f) \bullet \circ h(t).$$

Der Betrag des komplexen Frequenzgangs, bestimmt aus Real- und Imaginärteil mit

$$|H(f)| = \sqrt{[\Re\{H(f)\}]^2 + [\Im\{H(f)\}]^2}$$

ist der *Amplitudenfrequenzgang* oder *Amplitudengang*, die Phase

$$\varphi(f) = \arctan \frac{\Im\{H(f)\}}{\Re\{H(f)\}}$$

ist der *Phasenfrequenzgang* oder *Phasengang*.

### Inverse Fourier-Transformation

Die Impulsantwort lässt sich aus der Übertragungsfunktion durch die *inverse Fourier-Transformation*  $\mathcal{F}^{-1}\{H(f)\}$  zurückgewinnen:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df,$$

der Beweis kann durch Einsetzen erfolgen.

### Fourier-Transformation von Signalen

Die Impulsantwort  $h(t)$  ist die Systemantwort auf den Dirac-Stoß  $\delta(t)$ . Da man jedes beliebige Signal durch eine unendlich dichte Folge von Dirac-Stößen approximieren kann, muss die Fourier-Transformation demnach nicht nur für eine Impulsantwort  $h(t)$ , sondern auch für beliebige Signale  $s(t)$  gelten:

$$S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

und für die inverse Transformation

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df.$$

Die komplexe Funktion  $\mathcal{F}\{s(t)\} = S(f)$  nennt man das *Spektrum* des Signals. Durch die Zerlegung in Betrag und Phase (s.o.) erhält man *Amplituden-* und *Phasenspektrum*.

### Transformation einiger elementarer Signale und Systeme

Die Integralrechnung ermöglicht eine exakte Lösung der Fourier-Transformation – falls Signal oder Impulsantwort als analytische Funktion vorliegen und falls die Stammfunktion bekannt ist. Dies gilt für eine Reihe „idealer“ Signale und Systeme, die als Näherungen realer Signale und Systeme betrachtet werden können.

Auf dem folgenden Blatt sind einige solcher idealen Signale und Systeme in Zeit- und Frequenzbereich dargestellt. Im Frequenzbereich ist dabei jeweils der Amplitudenfrequenzgang bzw. das Amplitudenspektrum dargestellt; Phasenfrequenzgang bzw. Phasenspektrum werden hier nicht näher behandelt.

Lässt sich ein Signal nicht analytisch beschreiben (das gilt für die meisten realen Signale wie Musik oder Sprache), dann löst man das Fourier-Integral abschnittsweise numerisch mit Hilfe der Diskreten Fourier-Transformation (digital implementiert als DFT bzw. FFT).

### Literatur

- Karrenberg, U.: *Signale, Prozesse, Systeme*, Springer, 3. Aufl. 2003.
- Lüke, H.D.: *Signalübertragung. Grundlagen der digitalen und analogen Nachrichtenübertragungssysteme*, Springer 1990.
- Meyer, M.: *Kommunikationstechnik. Konzepte der modernen Nachrichtenübertragung*, Vieweg, 2. Aufl. 2002.
- Tohyama, M. & Koike, T.: *Fundamentals of Acoustic Signal Processing*, Academic Press 1998.

